

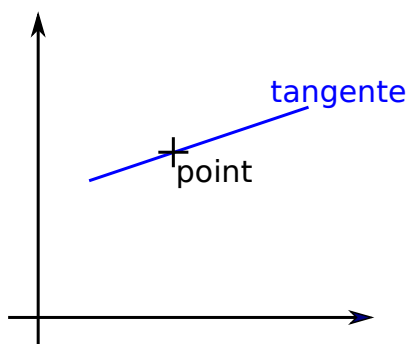
## 4 Fonction dérivée et sens de variations

*Partie explicative qu'il n'est pas nécessaire de recopier*

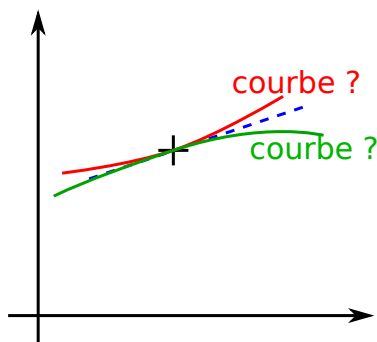
Mais finalement, à quoi sert cette dérivée ?

La dérivée est le coefficient directeur de la tangente. Mais encore ?

Supposons qu'on ait un point de la courbe, et qu'on connaisse la dérivée en ce point. Par exemple ici, on a la tangente et le point. Ici le nombre dérivé est positif (car la droite « monte »).



On ne sait pas exactement, mais on sait qu'elle s'approche de la tangente autour du point qui nous intéresse.



C'est peut-être comme la courbe rouge, ou la verte, ou autre chose, mais puisque la courbe doit "coller" à la tangente autour du point, elle est **forcément croissante** autour de ce point (jusqu'à où on ne sait pas).

⇒ On a donc dérivée positive → fonction croissante.

On a la même chose pour dérivée négative → tangente "qui descend" → courbe qui descend → fonction décroissante.

Cela marche dans les deux sens (à quelques détails près), mais on utilise plus souvent le signe de la dérivée pour obtenir le sens de variations que le contraire (c'est à ça que sert la dérivée dans la plupart des cas!).

*Fin de la partie explicative, vous pouvez recopier à partir de la suite :)*

⇒ **Propriété.** Sur un intervalle  $I$ ,

- si  $f$  est strictement croissante, alors  $f'(x) \geq 0$  sur cet intervalle,
- si  $f$  est strictement décroissante, alors  $f'(x) \leq 0$  sur cet intervalle,
- si  $f$  est constante, alors  $f'(x) = 0$  sur cet intervalle.

⇒ **Propriété.** Sur un intervalle  $I$ , on regarde le signe de la dérivée d'une fonction.

- Si la dérivée est strictement positive, alors la fonction est croissante sur  $I$ ,
- Si la dérivée est strictement négative, alors la fonction est décroissante sur  $I$ ,
- Si la dérivée est nulle, alors la fonction est constante sur  $I$  <sup>[23]</sup>.

**Exemple.**  $f(x) = -5x + 3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

On calcule sa dérivée :  $f'(x) = -5$ .

Le signe de la dérivée est strictement négatif <sup>[24]</sup>. Donc c'est une fonction décroissante. <sup>[25]</sup>

On le représente comme cela :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	↘	

[26]

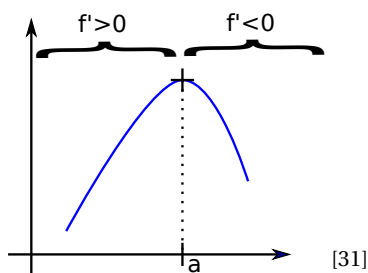
Si la dérivée s'annule en changeant de signe, cela change le sens de variation de la fonction, on aura donc un maximum ou un minimum.

**Illustration :**

Dérivée positive, puis devient négative

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	↗ ↘		

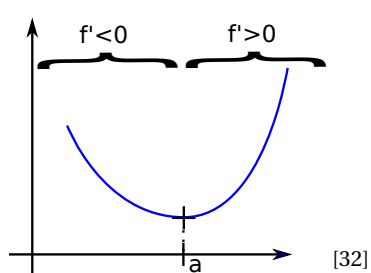
[28]



Dérivée négative, puis qui devient positive

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘ ↗		

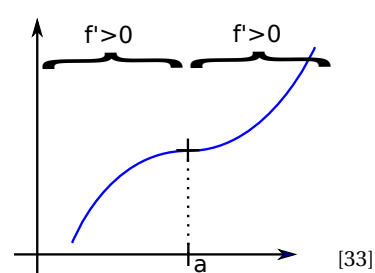
[29]



Piège <sup>[27]</sup> : dérivée positive, s'annule et redevient positive

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗ ↗		

[30]



[23]. Pour que la fonction soit constante, il faut que la dérivée soit nulle sur tout un intervalle. Si c'est juste sur un point ça ne "compte pas", comme on va le voir plus bas.

[24].  $-5$  est négatif!

[25]. En fait là ce n'est pas super fou parce qu'on connaît déjà le sens de variation d'une fonction affine. Mais c'est très simple et vous allez voir on va faire beaucoup mieux!

[26]. À bien noter : comme un tableau de variations ou de signe il y a une première ligne avec  $x$ . Puis une ligne du signe de  $f'$  la dérivée, et en dessous une ligne des variations de  $f$  la fonction de base

[27]. Il est peu probable que vous tombiez sur un tel piège dans une épreuve du bac, mais on ne sait jamais. Et puis le piège n'est pas si dur à éviter :)

[28]. Comme vous pouvez le voir, si on a retenu la propriété de départ (signe de la dérivée donne le sens de variations), on "suit" juste le tableau : la fonction est d'abord croissante, puis décroissante... donc forcément c'est un maximum au « milieu ».

[29]. Idem que plus haut, si on complète, on a « naturellement » un minimum car la fonction est décroissante puis croissante!

**Exemple.** <sup>[34]</sup> Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ . Étudier les variations de  $f$  sur  $[-2; 10]$ .

Réponse :

Première étape : calculer la dérivée de  $f$ .

$$f'(x) = (-1) \times 2x + 4 + 0 = -2x + 4$$

Deuxième étape : étude du signe de la dérivée.

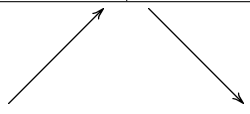
On résout  $-2x + 4 = 0$  :

$$-2x + 4 = 0 \iff -2x = -4 \iff x = \frac{-4}{-2} = \boxed{2}$$

Troisième étape : on établit le tableau de signe de  $f'$ . Ici c'est une expression du premier degré donc on se réfère au cours à ce sujet.

$x$	-2	2	10 <sup>[37]</sup>
$f'(x)$	+	0	- <sup>[38]</sup>

Quatrième étape : on en déduit les variations de  $f$ , qu'on met dans le même tableau :

$x$	-2	2	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Cinquième étape, on calcule les valeurs aux différents points<sup>[39]</sup> et on complète le tableau.

$$f(-2) = -(-2)^2 + 4 \times (-2) + 1 = -4 - 8 + 1 = -11$$

$$f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

$$f(10) = -(10)^2 + 4 \times 10 + 1 = -100 + 40 + 1 = -59$$

$x$	-2	2	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-11	5	-59 <sup>[40]</sup>

[30]. Là on voit que si on fait bien le tableau, on ne se fait pas avoir : la fonction est croissante, puis s'arrête un moment de croître, puis... recommence à être croissante. Donc il n'y a pas de maximum ou de minimum, c'est logique !

[31]. Vous remarquerez qu'au niveau du maximum, on pourrait tracer une tangente horizontale car ça fait un petit "plat". C'est lié au fait que  $f'(a) = 0$  (la dérivée s'annule en  $a$ )

[32]. Même remarque que pour le maximum : ici on pourrait tracer la tangente horizontale au niveau du minimum, ça fait un "plat".

[33]. La courbe fait une "feinte" : elle est croissante, puis fait un plat, on peut croire qu'elle va repartir en descendant, mais en fait non, elle "repart" après avoir fait une petite pause "à plat". Il n'y a donc pas de maximum ou de minimum ici, même si on a  $f'(a) = 0$  (un "plat").

[34]. Cette fois un exemple qui sert à quelque chose :

[39]. Tous les points qui apparaissent dans le tableau. Si il y a des  $+\infty$  évidemment on ne calcule pas !

[40]. Dans les exercices, on fait normalement les étapes 3, 4 et 5 en une seule fois (on complète le tableau petit à petit). Ici exceptionnellement on fait en plusieurs fois pour l'exemple.

**Remarque.** *On pouvait deviner grâce au chapitre sur le second degré qu'on aurait un tableau de variation comme cela, car comme  $a < 0$ , on a une parabole « tournée vers le bas ». Cela confirme ce qui a été fait avant, et nous avons en plus une méthode « automatique » pour trouver le sommet.*