

3 Loi de Bernoulli

On a vu dans un chapitre précédent (chapitre 7) l'épreuve de Bernoulli de paramètre p : une épreuve à deux issues, succès (S) et échec (E).^[19]

⇒ **Définition** (Loi de Bernoulli). On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec. La loi de probabilité associée à X est appelée la Loi de Bernoulli de paramètre p .

Cette loi est donnée par le tableau suivant :^[20]

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

[21]

⇒ **Propriété.** Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ^[22], alors

$$E(X) = p$$

[23]

Exemple. On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère que tirer l'as de Pique ou la dame de Trèfle est un succès.

- 1) Expliquer pourquoi il s'agit d'une loi épreuve de Bernoulli et préciser son paramètre.
- 2) On définit la variable aléatoire X qui vaut 1 sur un succès et 0 sur un échec. Donner la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer l'espérance de X . Interpréter.

Réponse :

- 1) C'est une épreuve à deux issues, succès (tirer l'as de Pique ou la Dame de Trèfle) et échec. La probabilité de tirer ces deux cartes est de $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ ^[24]. C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{26}$
- 2) X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{26}$, donc sa loi de probabilité est^[25]

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{26}$ ^[26]	$\frac{1}{26}$

[19]. Allez relire le chapitre 7 s'il le faut !

[20]. Explications. On a 0 et 1 comme valeurs de x_i . Ensuite on sait que p est la probabilité du succès, donc ça va dans la case correspondant à la probabilité d'avoir 1. Il nous reste à calculer l'autre probabilité, qu'on obtient en sachant que la somme des probabilités est égale à 1.

[21]. Ce tableau est en théorie à connaître par cœur, mais vous pourrez facilement le retrouver, il y a 0 et 1 dans les valeurs de x_i , puis le reste se "retrouve" facilement (voir explication précédente).

[22]. C'est le vocabulaire, on ne dit pas "X a la loi de Bernoulli" ou autre chose mais on dit "X suit la loi de Bernoulli de paramètre p "

[23]. Explication : on peut facilement le démontrer en faisant le calcul avec p . D'après le tableau,

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = 0 + p = p$$

[24]. Deux cartes sur 52...

[25]. On prend le tableau du cours, et on remplace p par $\frac{1}{26}$

- 3) $E(X) = \frac{1}{26}$ ^[27]. Si on répète cette expérience un grand nombre de fois, en moyenne, on aura $\frac{1}{26} \simeq 0,038$ succès par partie. ^[28]

[27]. Rien de plus à faire que d'appliquer la formule du cours !

[28]. Cela paraît bizarre 0,038 succès par partie, mais il faut s'imaginer que c'est une moyenne sur un grand nombre de parties. Par exemple sur 1000 parties, on aurait (calcul de proportionnalité !) environ 38 succès.