

Chapitre 9 – Variables aléatoires

1 Variable aléatoire

⇒ Rappel sur les jeux de cartes : Un jeu de 52 cartes (classique) contient les cartes suivantes : ^[1]

- As de Cœur, Roi de Cœur, Dame de Cœur, Valet de Cœur, 10 de Cœur, ..., 2 de Cœur ;
- As de Pique, Roi de Pique, Dame de Pique, Valet de Pique, 10 de Pique, ..., 2 de Pique ;
- As de Carreau, Roi de Carreau, Dame de Carreau, Valet de Carreau, 10 de Carreau, ..., 2 de Carreau ;
- As de Trèfle, Roi de Trèfle, Dame de Trèfle, Valet de Trèfle, 10 de Trèfle, ..., 2 de Trèfle.

On pourra les noter : 1C pour l'as de Cœur, 3P pour le 3 de Pique, VK pour le Valet de Carreau ^[2], 7T pour le 7 de Trèfle, etc.

Exemple. On joue au jeu suivant :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes.

- Si la carte est un as, on gagne 10 €
- Si la carte est un roi, une dame ou un valet, on gagne 5 €
- Si la carte est une autre carte (de 2 à 10) mais un cœur, on gagne 1 €
- Pour toute autre carte, on perd 1 €.

On note X la variable aléatoire qui donne le gain en € du joueur.

⇒ Le principe d'une variable aléatoire, c'est de s'intéresser non pas à l'issue de l'expérience (Valet de Cœur, 3 de Pique, ...), mais à leur "valeur numérique" associée. ^[3]

⇒ **Définition.** Si une variable aléatoire X prend des valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , alors la loi de probabilité de X est l'ensemble des probabilités $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, $P(X = x_n)$. ^[4]

On la met généralement sous forme d'un tableau :

x_i ^[5]	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$ ^[6]	p_1	p_2	...	p_n

On doit avoir $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ^[7]

Exemple. X prend les valeurs 10, 5, 1 et -1.

La loi de probabilité est :

[1]. Pour voir la tête des cartes si vous n'en avez pas sous la main : https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_cartes_français

[2]. K comme CArreau puisque C sera pour « Cœur »

[3]. On ne peut "rien" faire avec des données comme Valet de Cœur ou 3 de Pique. Par contre avec des nombres (+5, -1 on peut "faire" quelque chose : les additionner, faire des statistiques, etc. Notamment on calculera des moyennes... et on ne peut pas calculer une moyenne de "3 de Pique" et "Valet de Cœur" !

[4]. C'est-à-dire la probabilité qu'on "tire" quelque chose qui ait la valeur x_1 , etc.

[7]. La somme de toutes les probabilités doit faire toujours 1 ! C'est une excellente manière de vérifier vos résultats...

x_i	10	5	1	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{27}{52}$

[8]

Justification^[9] :

- $P(X = 10) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ [10]
- $P(X = 5) = \frac{4 \times 3}{52} = \frac{3}{13}$ [11]
- $P(X = 1) = \frac{9}{52}$ [12]
- $P(X = -1) = \frac{3 \times 9}{52} = \frac{27}{52}$ [13]

Vérification^[14] : $\frac{1}{13} + \frac{3}{13} + \frac{9}{52} + \frac{27}{52} = 1$

[8]. Avouez que ce tableau "récapitulatif" du jeu est finalement simple : on a une chance sur 13 de gagner 10 €, 3 chances sur 13 de gagner 5 €, etc.

[9]. Voilà le "minimum" demandé pour justifier, mais vous verrez selon les exercices.

[10]. Il y a 4 as dans le jeu, et il y a équiprobabilité, on peut donc utiliser la formule $\frac{\text{nombre d'as}}{\text{nombre total de cartes}}$

[11]. Il y a Roi, Dame, Valet quatre fois par "couleur" d'où 3×4 .

[12]. Il y a 9 cartes concernées : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 de Cœur.

[13]. Il y a 9×3 cartes concernées : du 2 at 10 (9 cartes) de Pique, pareil en Trèfle, Pareil en Carreau.

[14]. Pas obligatoire, mais conseillé !